

## ЛЕКЦИЯ 13

### § 1. Коши есебі шешімінің параметр мен бастапқы берілгендерден тәуелділігі

Дифференциалдық теңдеудің не жүйенің қандай да болмасын бір  $\langle a, b \rangle$  аралығында анықталған шешімі. Осы шешімнің бастапқы берілгендерінен тәуелді. Геометриялық тілмен айтқанда дифференциалдық теңдеудің не жүйенің интегралдық қисығы өзі өтетін бастапқы берілген нүктенің координаталарынан тәуелді. Мысалы,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (1)$$

қалыпты жүйенің,  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$  шартын қанағаттандыратын шешімі

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \left( (x_0 - y_0) e^{-(t-t_0)} + (x_0 + y_0) e^{t-t_0} \right), \\ y(t) = \frac{1}{2} \left( (y_0 - x_0) e^{-(t-t_0)} + (y_0 + x_0) e^{t-t_0} \right) \end{cases} \quad (2)$$

функциялар жүйесі болады. Мұндағы  $t_0, x_0, y_0$  – шешімнің бастапқы берілгендері. Шешімнің тәуелсіз айнымалы  $t$ -дан басқа  $t_0, x_0, y_0$ -дерден тәуелді екені, яғни  $t, t_0, x_0, y_0$  шамаларының функциясы екені

$$x = x(t, t_0, x_0, y_0), \quad y = y(t, t_0, x_0, y_0)$$

көрініп тұр. Егер  $x_0, y_0$  -дерді шешімнің бастапқы мәндері деп есептемей кез келген сандық мән ( $\pm \infty$  -ті қоса санағанда) қабылдай алатын параметрлер деп есептесе, онда (2) шешім (1) жүйенің *Коши түріндегі жалпы шешімі* болады (II-тарау, §3). Бұл айтылғанға қосымша, дифференциалдық теңдеулер көп жағдайда физикалық, механикалық, т.б. табиғаттану есептерінің математикалық моделі болатынын, сондықтан оған белгілі бір параметрлер енетінін ескеру қажет. Әлбетте теңдеудің шешімі ол параметрлерден тәуелді болады. Параметрлер мен бастапқы берілгендер әдетте өлшеу арқылы анықталады. Ал іс жүзінде өлшеу абсолют дәл бола алмайды. Себебі, мысалы, сантиметрлеп өлшегенде миллиметрдің бөліктеріндей, граммдап өлшегенде миллиграмның бөліктеріндей қате жіберіледі. Олай болса, параметрлер мен бастапқы берілгендер белгілі бір дәлдікпен жуықтап анықталады. Егер шешім параметрлер мен бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелділікте болмаса, онда олардың аз өзгерісі (өлшеу барысында жіберілген аздаған қате) шешімнің елеулі, кейде тіпті зор өзгерісіне әкеп тіреуі мүмкін. Мұндай шешімдердің практикалық пайдасы аз екені өздігінен түсінікті.

Оң жағы бір (скаляр) параметрден тәуелді қалыпты жүйе

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \quad (3)$$

карастыралық. Мұндағы  $f(t, x, \mu)$  вектор-функциясы  $t, x, \mu$  айнымалы-ларының кеңістігінде жататын қандай да бір ашық  $D^*$  облысында анық-талған, яғни

$$f = colon(f_1, \dots, f_n) : D^* \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad D^* \subset \mathbf{R}^{2+n} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_\mu.$$

Жүйенің шешімдері  $\mu$  параметрінен тәуелді болатыны айтылды.

**1-ТЕОРЕМА** (шешімнің параметрден үзіліссіз тәуелді болуы туралы). Егер  $f(t, x, \mu)$  вектор-функциясы  $D^*$  облысында үзіліссіз, ал оның кез келген шенелген тұйық ішкі облысында  $x$  бойынша Липшиц шартын қанағаттандыратын болса, онда кез келген  $(t_0, x_0, \mu_0) \in D^*$  нүктесі үшін  $h > 0$ ,  $\delta > 0$  сандары табылып, (3) жүйенің

$$\varphi(t_0, \mu) = x_0 = \text{colon}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (4)$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын  $x = \varphi(t, \mu) = \text{colon}(\varphi_1(t, \mu), \dots, \varphi_n(t, \mu))$  шешімі

$$G = \{(t, \mu) : |t - t_0| \leq h, |\mu - \mu_0| < \delta\}$$

облысында  $t, \mu$  айнымалыларының жиынтығы бойынша үзіліссіз болады.

**ДӘЛІЛДЕУІ.** Параметр  $\mu$ -дің әрбір бекітілген мәнінде Коши есебі шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теореманың (§2) шарттары орындалып тұр. Сондықтан (3), (4) есептің шешімі бар. Ол шешімнің өзі мен оның анықталу облысы  $\mu$  параметрінен тәуелді.

$D^*$  облысында толығынан жататын

$$\Pi^* = \{(t, x, \mu) \in D^* : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b, |\mu - \mu_0| \leq c\}$$

параллелепипедін қарастыралық. Теореманың шартынан

$$\sup_{\Pi^*} \|f(t, x, \mu)\| := M^* < \infty$$

бар болатыны және  $\exists L > 0$ , кез келген екі  $(t, x_1, \mu) \in \Pi^*$ , және  $(t, x_2, \mu) \in \Pi^*$  нүктелері үшін

$$\|f(t, x_1, \mu) - f(t, x_2, \mu)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

теңсіздігі орындалатыны шығады. Мұндағы  $L$  саны (Липшиц тұрақтысы)  $\Pi^*$  параллелепипедінен, яғни  $a, b, c$  сандарынан тәуелді.

Шенелген тұйық  $\Pi^*$  облысында үзіліссіз  $f(t, x, \mu)$  вектор-функциясы ол облыста бірқалыпты үзіліссіз. Демек кез келген  $\varepsilon_1 > 0$ , саны үшін  $\delta(\varepsilon_1) > 0$  саны табылып,  $|\mu - \mu_0| < \delta$  теңсіздігін қанағаттандыратын  $\Pi^*$  облысының кез келген  $(t, x, \mu) \in \Pi^*$ ,  $(t, x, \mu_0) \in \Pi^*$  нүкте-лері үшін

$$\|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)\| < \varepsilon_1$$

теңсіздігі орындалады.  $\Pi^*$ -дан кіші параллелепипед  $\Pi_{h,\delta}^* = \{(t, x, \mu) \in \Pi^* : |t - t_0| \leq h, \|x - x_0\| \leq b, |\mu - \mu_0| \leq \delta\}$  қарастыралық. Параметр  $\mu$ -дің  $[\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta]$  кесіндісінен алынған әрбір мәнінде (3), (4) есептің  $[t_0 - h, t_0 + h]$  кесіндісінде анықталған шешімі бар және жалғыз болады, әрі ол шешімнің графигі  $\Pi_{h,\delta}^*$  облысында жатады (§2-тағы теореманың қысатын бейнелеу қағидасын қолданып дәлелденген бөлігін қараңыз).

Параметрдің  $\mu = \mu_0$  мәнінде табылатын шешімді  $\varphi(t, \mu_0)$  арқылы белгілелік. Әлбетте  $\varphi(t, \mu)$ ,  $\varphi(t, \mu_0)$  шешімдері  $G$  облысында мына теңдіктерді

$$\begin{aligned}\varphi(t, \mu) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) d\tau, \\ \varphi(t, \mu_0) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0) d\tau\end{aligned}$$

қанағаттандырады. Бұл шешімдердің айырымын бағалайық.

$$\begin{aligned}\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)\| d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu_0) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)\| d\tau \right| \leq \\ &\leq \varepsilon_1 |t - t_0| + \left| \int_{t_0}^t L \|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)\| d\tau \right|.\end{aligned}$$

Енді  $t \geq t_0$  болсын. Онда

$$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\| \leq \varepsilon_1 h + \int_{t_0}^t L \|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)\| d\tau$$

болады да, Гронуолл леммасы бойынша

$$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\| < \varepsilon_1 h e^{L(t-t_0)} \leq \varepsilon_1 h e^{Lh}$$

теңсіздігі орындалады. Бұл теңсіздік  $t \leq t_0$  үшін де орындалады. Оны дәлелдеу үшін Гронуолл леммасындағы  $t$  мен  $t_0$ -ді орындарымен ауыстыру жеткілікті. Сонымен,  $|t - t_0| \leq h$ ,  $|\mu - \mu_0| < \delta$  болғанда аталған теңсіздік орындалады.

Енді кез келген  $\varepsilon > 0$  саны үшін  $\varepsilon_1$  санын  $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2he^{Lh}}$  теңсіздігі орындалатындай етіп алсақ, ал оған сәйкес табылатын  $\delta(\varepsilon_1)$  санын  $\delta$  арқылы белгілесек,  $|\mu - \mu_0| < \delta$  болғанда,

$$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

болатыны шығады. Бұл шешімнің параметрден үзіліссіз тәуелді болатынын білдіреді.

Айталық  $(t_1, \mu_1)$  –  $G$  облысының кез келген нүктесі болсын.

$$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t_1, \mu_1)\| \leq \|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_1)\| + \|\varphi(t, \mu_1) - \varphi(t_1, \mu_1)\| \quad (5)$$

айырымын қарастырайық. Кез келген  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  үшін  $\delta > 0$  саны табылып,  $|\mu - \mu_1| < \delta$  болғанда

$$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_1)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \text{ болады.}$$

Ал шешімнің  $t$  бойынша үзіліссіздігінен, кез келген  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  үшін  $\delta_1 > 0$  саны табылып,  $|t - t_1| < \delta_1$  болғанда  $\|\varphi(t, \mu_1) - \varphi(t_1, \mu_1)\| < \frac{\varepsilon}{2}$  болатыны шығады. Сонда  $|t - t_1| < \delta_1$ ,  $|\mu - \mu_1| < \delta$  болғанда (5) теңсіздіктен

$$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t_1, \mu_1)\| < \varepsilon$$

теңсіздігі алынады. Яғни  $x = \varphi(t, \mu)$  шешімі  $(t_1, \mu_1) \in G$  нүктесінде үзіліссіз. Теорема дәлелденді.

**Ескерту.** Теореманы  $[t_0 - h, t_0 + h]$  кесіндісінде ғана емес,  $x = \varphi(t, \mu_0)$  шешімі анықталатын кез келген кесіндіде де дәлелдеуге болады [7; 9].

**2-ТЕОРЕМА** (шешімнің параметр бойынша үзіліссіз дифференциалдануы туралы). Егер  $f(t, x, \mu)$  вектор-функциясы ашық  $D^* \subset \mathbf{R}^{1+n}$  облысында өзінің

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial \mu}, \quad (j, k = \overline{1, n})$$

дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болса, онда кез келген  $(t_0, x_0, \mu_0) \in D^*$  нүктесі үшін  $G$  облысында анықталатын (3), (4) есептің  $x = \varphi(t, \mu)$  шешімінің  $\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu}$  дербес туындысы сол облыста  $t, \mu$  айнымалыларының жиынтығы бойынша үзіліссіз болады.

**ДӘЛІЛДЕУІ.** Дербес туындылар  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}, (j, k = \overline{1, n})$  үзіліссіз болғандықтан  $f(t, x, \mu)$

вектор-функциясы  $D^*$ -да жататын кез келген шенелген тұйық параллелепипедте  $x$  бойынша Липшиц шартын қанағаттандырады. Сондықтан 1-теорема бойынша (3), (4) есептің  $x = \varphi(t, \mu)$  шешімі  $t, \mu$  айнымалылары бойынша  $G$  облысында үзіліссіз болады.

$$\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta), \quad \mu + \Delta\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$$

параметрдің екі мәні болсын. Сонда бұл мәндерге сәйкес келетін (3), (4) есептің шешімдері

$$\dot{\varphi}(t, \mu) = f(t, \varphi(t, \mu), \mu)$$

$$\dot{\varphi}(t, \mu + \Delta\mu) = f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu)$$

теңдіктерін қанағаттандырады. Олардың екіншісінен біріншісін алып тасталық:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)] &= f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, \varphi(t, \mu), \mu) = \\ &= f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, \varphi(t, \mu), \mu + \Delta\mu) + f(t, \varphi(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - \end{aligned}$$

$$- \mathbf{f}(t, \varphi(t, \mu), \mu). \quad (6)$$

Адамар леммасы (VI-тарау, § 2) бойынша

$$f_j(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f_j(t, \varphi(t, \mu), \mu + \Delta\mu) = \sum_{k=1}^n \psi_{jk}(t, \mu, \Delta\mu) [\varphi_k(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi_k(t, \mu)],$$

$$f_j(t, \varphi(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f_j(t, \varphi(t, \mu), \mu) = g_j(t, \mu, \Delta\mu), \quad j = \overline{1, n}.$$

Демек, векторлық түрде жазатын болсақ,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - \mathbf{f}(t, \varphi(t, \mu), \mu) = \\ = \Psi(t, \mu, \Delta\mu) [\varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)] + \mathbf{g}(t, \mu, \Delta\mu) \Delta\mu \end{aligned} \quad (7)$$

теңдігін аламыз. Мұндағы

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mu) &= colon(\varphi_1(t, \mu), \dots, \varphi_n(t, \mu)), \\ \Psi(t, \mu, \Delta\mu) &:= (\psi_{jk}(t, \mu, \Delta\mu))_{n \times n}, \quad j, k = \overline{1, n}, \\ \mathbf{g}(t, \mu, \Delta\mu) &:= colon(g_1(t, \mu, \Delta\mu), \dots, g_n(t, \mu, \Delta\mu)). \end{aligned}$$

Адамар леммасы бойынша  $\Psi(t, \mu, \Delta\mu)$  матрицасы мен  $\mathbf{g}(t, \mu, \Delta\mu)$  вектор-функциясы  $t, \mu, \mu + \Delta\mu, \varphi(t, \mu), \varphi(t, \mu + \Delta\mu)$  айнымалыларынан үзіліссіз тәуелділікте болады. Олар

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial \mu}, \quad (j, k = \overline{1, n})$$

дербес туындыларының интегралдары арқылы өрнектеледі. Ал дәлелденген 1-теорема бойынша  $\varphi(t, \mu), \varphi(t, \mu + \Delta\mu)$  функциялары  $t, \mu, \Delta\mu$  айнымалыларынан үзіліссіз тәуелді. Олай болса,  $\Psi(t, \mu, \Delta\mu)$  матрицасы мен  $\mathbf{g}(t, \mu, \Delta\mu)$  вектор-функциясы  $t, \mu, \Delta\mu$  айнымалыларынан үзіліссіз тәуелділікте болады. Егер  $\mu$ -ді бекітілген деп санасақ, үзіліссіз тәуелділік тек  $t, \Delta\mu$  айнымалыларына ғана қатысты деп түсініледі.

Егер  $\Delta\varphi := \varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)$  белгілеуін енгізсек,  $\Delta\mu \neq 0$  кезде (7) теңдікке сүйеніп, (6) теңдіктен

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \Psi(t, \mu, \Delta\mu) \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} + \mathbf{g}(t, \mu, \Delta\mu)$$

теңдігі алынады. Бұған қосымша

$$\left. \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \right|_{t=t_0} = \frac{\varphi(t_0, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t_0, \mu)}{\Delta\mu} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0}{\Delta\mu} = \mathbf{o}$$

теңдігі орындалады.

Демек,  $\mathbf{y} := \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$  вектор-функциясы ( $\Delta\mu \neq 0$ ) сызықтық дифференциалдық

теңдеулердің мынадай қалыпты жүйесінің

$$\dot{\mathbf{y}} = \Psi(t, \mu, \Delta\mu) \mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mu, \Delta\mu), \quad \mathbf{y} = colon(y_1, \dots, y_n) \quad (8)$$

нөлдік шартты

$$y(t_0, \mu, \Delta\mu) = 0$$

қанағаттандыратын шешімі болып табылады. Ал (8) жүйенің оң жағы 1-теореманың барлық шартын қанағаттандырады. Сондықтан  $y = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$  вектор-функциясы  $\Delta\mu$  бойынша  $|\Delta\mu|$ -дің мейлінше аз мәндерінде үзіліссіз. Ендеше ақырлы шек

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \frac{\partial\varphi(t, \mu)}{\partial\mu}$$

бар болады. Адамар леммасы бойынша,

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \psi_{jk}(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{\partial f_j(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_k}, \quad j, k = \overline{1, n},$$

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} g_j(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{\partial f_j(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial \mu}, \quad j = \overline{1, n},$$

теңдіктері орындалады. Сондықтан сәйкес теңдіктерде шекке көшу арқылы  $z = colon(z_1, \dots, z_n) := \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$  вектор-функциясы мынадай Коши есебінің

$$\dot{z} = A(t, \mu)z + b(t, \mu), \quad z(t_0) = colon(z_1(t_0), \dots, z_n(t_0)) = o \quad (9)$$

шешімі болатынын көреміз. Мұнда

$$A(t, \mu) := \left( \frac{\partial f_j(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_k} \right)_{n \times n}, \quad j, k = \overline{1, n},$$

$$b(t, \mu) := colon \left( \frac{\partial f_1(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial \mu}, \dots, \frac{\partial f_n(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial \mu} \right).$$

Сызықтық теңдеулердің (9) жүйесі *параметр бойынша вариациялық теңдеулер жүйесі* деп аталады.

Енді (9) жүйеге 1-теореманы қолданып,  $\frac{\partial\varphi(t, \mu)}{\partial\mu}$  вектор-функциясының  $t, \mu$  бойынша

$G$  облысында үзіліссіз болатынын аламыз. Теорема дәлелденді.

**Ескертулер.** 1. Шешімнің параметр бойынша туындысын осы параметрдің белгілі бір  $\mu = \mu_0$  мәнінде анықтау үшін (3) жүйені шешіп, шешімнің туындысын  $\mu = \mu_0$  мәнінде тауып жатпай-ақ, (9) жүйені  $\mu = \mu_0$  болғанда интегралдаса жеткілікті. Сонда, егер параметрдің  $\mu = \mu_0$  мәнінде (3), (4) Коши есебінің  $x = \varphi(t, \mu_0)$  шешімі белгілі болса, онда  $\mu$ -дің  $\mu_0$ -ге жақын мәндеріндегі (3), (4) есептің шешімін жуықтап табуға болады.

Шынында да  $\mu_0$ -ге жақын  $\mu$  үшін

$$\varphi(t, \mu) \cong \varphi(t, \mu_0) + \frac{\partial \varphi(t, \mu_0)}{\partial \mu} (\mu - \mu_0)$$

деп жаза аламыз. Ал дербес туынды  $\frac{\partial \varphi(t, \mu_0)}{\partial \mu}$

$$\dot{z}_0 = A_0(t)z_0 + b_0(t)$$

вариациялық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады. Мұнда

$$A_0(t) := A(t, \mu_0) = \left( \frac{\partial f_j(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)}{\partial x_k} \right)_{n \times n}, \quad j, k = \overline{1, n},$$

$$b_0(t) := b(t, \mu_0) = \text{colon} \left( \frac{\partial f_1(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)}{\partial \mu}, \dots, \frac{\partial f_n(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)}{\partial \mu} \right).$$

Әлбетте бұл жүйені интегралдау (3) жүйені интегралдауға қарағанда оңайырақ. Егер (3) жүйенің орнына бір теңдеу қарастыратын болсақ, онда соңғы жүйе бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуге айналады. Оны интегралдай алатынымыз белгілі.

2. Егер  $f(t, x, \mu)$  вектор-функциясы ашық  $D^* \subset \mathbf{R}^{2+n}$  облысында өзінің  $l$ -ретке ( $l \geq 1$ ) дейінгі  $\frac{\partial^\nu f_j}{\partial x_k^\nu}, \quad \frac{\partial^\nu f_j}{\partial \mu^\nu}, \quad (j, k = \overline{1, n}; \nu = \overline{1, l})$  дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болса,

онда кез келген  $(t_0, x_0, \mu_0) \in D^*$  үшін  $G$  облысында анықталатын (3), (4) есептің  $x = \varphi(t, \mu)$  шешімінің  $l$ -ретке дейінгі дербес туындылары ( $\nu = \overline{1, l}$ ) ол облыста  $t, \mu$  айнымалыларының жиынтығы бойынша үзіліссіз болады.

Шынында да, егер  $\nu \geq 2$  болса, онда  $\varphi(t, \mu)$  вектор-функциясының орнына  $\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu}$

вектор-функциясын қарастырып, (9) жүйеге 2-теореманы қолдану арқылы  $\frac{\partial^2 \varphi(t, \mu)}{\partial \mu^2}$  дербес

туындысының  $G$  облысында бар және  $t, \mu$  айнымалыларының жиынтығы бойынша үзіліссіз екенін табамыз. Осылайша әрі қарай жалғастыра берсек  $l$ -ретті туынды туралы айтылған тұжырымның дұрыстығына келеміз.

3. Дәлелденген 1 және 2-теоремалар әлбетте (3) жүйенің оң жағы бірнеше (мысалы  $m$ ) параметрден тәуелді, яғни

$$f(t, x, \mu), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$$

болғанда да күшінде қалады. Ол кездегі теоремалардың дәлелдеуі де жоғарыда келтірілген дәлелдеулердің сұлбасы бойынша жүргізіледі [11].

Енді Коши есебі шешімінің бастапқы берілгендерден тәуелділігі туралы мәселеге көшелік. Бұл мәселені ілгеріде зерттеліп кеткен шешімнің параметрден тәуелді болатыны туралы мәселеге әкеп тіреуге болады.

Шынында да,  $\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$  Коши есебі қойылсын. Мұндағы  $t_0, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  – бастапқы берілгендер. Оларды параметрлер есебінде қарастыруға болады. Солай етелік те, олардың айнымалы екенін білдіру үшін  $t_0$ -ді  $s$  арқылы  $x_0$ -ді  $\eta$  арқылы белгілейік. Сонда жүйенің  $x(s) = \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  шартын қанағаттандыратын шешімі  $t$ -дан

басқа  $s, \eta$  шамаларынан да тәуелді болады (шешімнің бастапқы берілгендерден тәуелді болатыны мысал арқылы ілгеріде көрсетілді). Ол шешімді  $x = \varphi(t, s, \eta) = (\varphi_1(t, s, \eta), \dots, \varphi_n(t, s, \eta))$  вектор-функциясы арқылы белгілелік. Демек,  $\varphi(s, s, \eta) = \eta$ . Жүйеге  $t - s = \tau, x - \eta = y$  ауыстыруын енгізейік. Онда  $\tau, y(\tau)$  бойынша мынадай жүйе

$$\frac{dy}{d\tau} = \dot{x}(\tau + s) = f(\tau + s, x(\tau + s)) = f(\tau + s, y(\tau) + \eta)$$

аламыз. Демек  $x = \varphi(t, s, \eta)$  шешіміне

$$\frac{dy}{d\tau} = f(\tau + s, y(\tau) + \eta), \quad y(0, s, \eta) = o$$

Коши есебінің шешімі сәйкес келеді. Вектор-функция  $f(\tau + s, y(\tau) + \eta)$  бастапқы берілгендерден тәуелді, ал шешімнің бастапқы мәні –  $o$  олардан тәуелсіз, яғни бұл есеп дәл (3), (4) есептен аумайды. Сонымен, Коши есебі шешімінің  $s, \eta$  бастапқы берілгендерінен тәуелділігін зерттеу, соңғы есеп шешімінің  $s, \eta$  параметрлерінен тәуелділігін зерттеуге әкеп тіреледі. Ендеше дәлелденген 1, 2-теоремалар мен 2-теореманың 3-ескертуіне сүйене отырып, төмендегідей теоремаларды тұжырымдауға болады.

**3-ТЕОРЕМА** (шешімнің бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелді болуы туралы). Егер  $f(t, x)$  вектор-функциясы ашық  $D \subset \mathbf{R}^{1+n} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n$  облысында үзіліссіз, ал оның кез келген шенелген тұйық ішкі облысында  $x$  бойынша Липшиц шартын қанағаттандыратын болса, онда кез келген  $(t_0, x_0) \in D$  нүктесі үшін  $h > 0, \delta > 0$  сандары табылып, Коши есебінің  $x = \varphi(t, s, \eta)$  шешімі

$$G^* = \{(t, s, \eta) : |t - s| \leq h, |s - t_0| < \delta, \|\eta - x_0\| < \delta\}$$

облысында  $t, s, \eta$  айнымалыларының жиынтығы бойынша үзіліссіз болады.

Әлбетте бұл теореманы 1 теоремаға тәуелсіз өз алдына дәлелдеуге де болады [2; 11].

**4-ТЕОРЕМА** (шешімнің бастапқы берілгендер бойынша үзіліссіз дифференциалдануы туралы). Егер  $f(t, x)$  вектор-функциясы ашық  $D \subset \mathbf{R}^{1+n}$  облысында өзінің барлық аргументтері бойынша алынған дербес туындыларымен  $\left( \frac{\partial f_j}{\partial t}, \frac{\partial f_j}{\partial x_k}, j, k = \overline{1, n} \right)$

бірге үзіліссіз болса, онда кез келген  $(t_0, x_0) \in D$  нүктесі үшін  $G^*$  облысында анықталатын жүйенің

$$\varphi(s, s, \eta) = \eta$$

шартын қанағаттандыратын  $x = \varphi(t, s, \eta) = colon(\varphi_1(t, s, \eta), \dots, \varphi_n(t, s, \eta))$  шешімінің  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial s}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta_k}, j, k = \overline{1, n}$  дербес туындылары осы облыста  $t, s, \eta$  айнымалыларының жиынтығы бойынша үзіліссіз болады.

Бұл жерде  $y := \frac{\partial \varphi(t, t_0, x_0)}{\partial s}$  дербес туындысының мына есептің

$$\dot{y} = A(t)y, \quad y(t_0) = -f(t_0, x_0), \quad y = \text{colon}(y_1, \dots, y_n),$$

ал

$$z_k := \frac{\partial \varphi(t, t_0, x_0)}{\partial \eta_k} = \text{colon} \left( \frac{\partial \varphi_1(t, t_0, x_0)}{\partial \eta_k}, \dots, \frac{\partial \varphi_n(t, t_0, x_0)}{\partial \eta_k} \right)$$

дербес туындысының мына есептің ( $k = \overline{1, n}$ )

$$\dot{z}_k = A(t)z_k, \quad z_k(t_0) = e_k = \text{colon}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

шешімі болатынын ескерген жөн. Мұнда

$$A(t) := \left( \frac{\partial f_j(t, \varphi(t, t_0, x_0))}{\partial x_k} \right)_{n \times n}, \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Бірінші жүйе  $t$ -ның бастапқы мәні бойынша вариациялық теңдеулер, ал екінші жүйе шешімнің бастапқы мәндері бойынша вариациялық теңдеулер жүйесі деп аталады. Бұл теорема үшін 2-теореманың 1, 2-ескертулерін қайталауға болатыны өздігінен түсінікті. Тек параметрдің орнына бастапқы берілгендерді алу керек.

**МЫСАЛ.**  $\dot{x} = f(t, x), \quad x(1) = x_0, \quad x = (x_1, x_2), \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0) = (3, 2), \quad f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x)),$   
 $f_1(t, x) := x_1 x_2 + t^2, \quad f_2(t, x) := -\frac{x_2^2}{2}$  Коши есебі-нің  $x = \varphi(t, t_0, x_0) = (\varphi_1(t, t_0, x_0), \varphi_2(t, t_0, x_0))$  шешімінің  $\frac{\partial \varphi_1(t, t_0, x_0)}{\partial x_2^0}$  дербес туындысын табу керек.

**ШЕШҮІ.** Вариациялық теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\dot{z}_2 = A(t)z_2, \quad z_2 = \text{colon}(z_{12}, z_{22}).$$

Мұнда

$$z_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2^0} = \text{colon} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2^0}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2^0} \right),$$

$$A(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(t, \varphi)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(t, \varphi)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(t, \varphi)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(t, \varphi)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2(t, t_0, x_0) & \varphi_1(t, t_0, x_0) \\ 0 & -\varphi_2(t, t_0, x_0) \end{pmatrix}.$$

Бастапқы шарт  $z_2 = (0, 1)$  болады. Сонда координаталар арқылы есеп мына түрде

$$\dot{z}_{12} = \varphi_2(t, t_0, x_0)z_{12} + \varphi_1(t, t_0, x_0)z_{22}, \quad z_{12}(1) = 0;$$

$$\dot{z}_{22} = -\varphi_2(t, t_0, x_0)z_{22}, \quad z_{22}(1) = 1$$

жазылады. Берілген жүйені екінші теңдеуден бастап интегралдауға болады. Сонда бастапқы шартты ( $t_0 = 1, \quad x_1^0 = 3, \quad x_2^0 = 2$ ) қанағаттандыратын  $\varphi_1(t, 1, 3, 2) = t^2(t + 2),$   
 $\varphi_2(t, 1, 3, 2) = \frac{2}{t}$  шешімін аламыз. Демек есеп мына түрде

$$\dot{z}_{12} = \frac{2}{t} z_{12} + t^2(t+2)z_{22}, \quad z_{12}(1) = 0;$$

$$\dot{z}_{22} = -\frac{2}{t} z_{22}, \quad z_{22}(1) = 1$$

жазылады. Бұл жүйені да екінші теңдеуден бастап интегралдау арқылы, есептің

$$z_{12} = t^2 \ln t + 2t^2 - 2t, \quad z_{22} = \frac{1}{t^2}$$

шешімін аламыз. Сонымен іздеп отырған дербес туындының мәні мынадай:

$$\frac{\partial \varphi_1(t, t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial x_2^0} = t^2 \ln t + 2t^2 - 2t.$$

### Жаттығулар

Төмендегі есептерде, олардың шешімінің параметр немесе бастапқы берілгендер бойынша дербес туындысын табыңыз.

1.  $\dot{x} = x + \mu(t + x^2), \quad x(0) = 1, \quad \left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} - ?$
2.  $\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} - ?$
3.  $\dot{x} = x + x^2 + tx^3, \quad x(2) = x_0, \quad \left. \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|_{x_0=0} - ?$
4.  $\dot{x} = \sin(tx), \quad x(t_0) = x_0, \quad \left. \frac{\partial x}{\partial t_0} \right|_{t_0=0} - ? \quad \left. \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|_{x_0=0} - ?$

### Бақылау сұрақтары

1. Қалыпты жүйе векторлық түрде қалай жазылады?
2. Қалыпты жүйе шешімінің параметрден үзіліссіз тәуелділігі қалай дәлелденеді?
3. Коши есебі шешімінің бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелділігі нені білдіреді?
4. Коши есебі шешімінің параметр бойынша үзіліссіз дифференциалдануы туралы теореманың тұжырымы қандай?
5. Коши есебі шешімінің бастапқы берілгендер бойынша үзіліссіз дифференциалдануы туралы теореманың тұжырымы қандай?